La trigonométrie

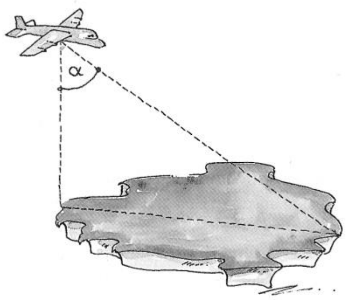
Du grecque : trigonon = le triangle metria = mesure

Le but c’est le calcul de la longueur des ***côtés*** (le côté) et la grandeur des ***angles*** (Winkel) d’un ***triangle***

(vue du Niesen sur le lac de Thoune)

Quelques applications de la trigonométrie

- mesurer des distances

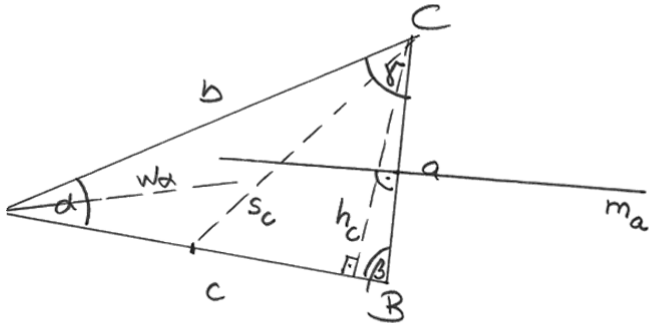


- La triangulation: fabrication d’une carte géographique en mesurant et calculant les distances horizontales et verticales
- En astronomie

Il y a plusieurs triangles particuliers

triangle rectangle (avec un angle droit) ***isocèle*** ***équilatéral*** (gleichseitig)

Notions dans le triangle



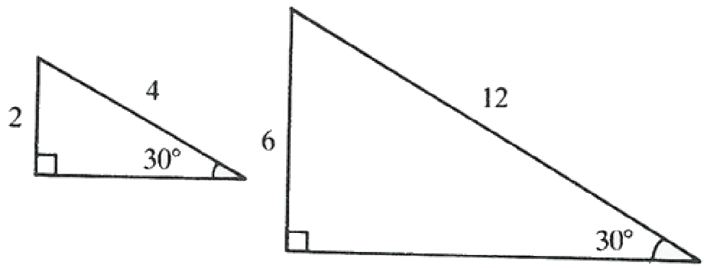
la bissectrice divise l'angle en deux parties égales. L'intersection des bissectrices donne le centre du ***cercle inscrit*** (Inkreis)

la médiane divise le côté opposé en deux segments identiques. L'intersection donne ***le centre de gravité*** (Schwerpunkt)

la médiatrice est verticale sur ***le point milieu*** (Mittelpunkt) d'un côté du triangle

la hauteur segment vertical entre un sommet (Eckpunkt) du triangle et le côté opposé

Voici deux triangles rectangles et semblables



Les triangles sont semblables (ähnlich) veut dire que la forme des triangles est identique, mais pas la taille (Grösse)

- les angles sont identiques
- le rapport de côtés (Seitenverhältnis) est identique (Strahlensätze)

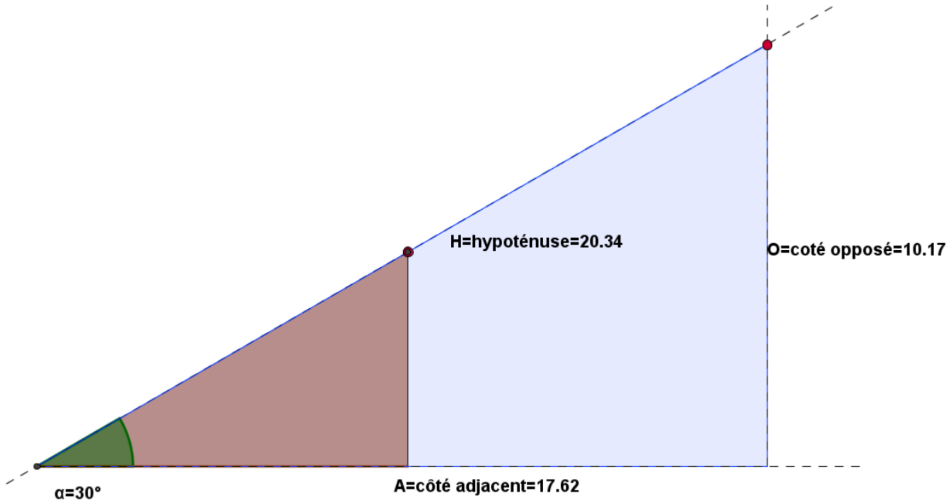
En vue d'un angle α du triangle on peut préciser le nom des côtés d'un triangle rectangle.

H : l'hypoténuse (opposé à l'angle droit, le côté plus long)

O : côté opposé (à l'angle α ; Gegenkathete)

A : côté adjacent (Ankathete)

Exemple Voici deux triangles rectangles et semblables avec $\alpha = 30$



Rapports pour un angle $\alpha = 30$	
le côté opposé O et l'hypoténuse H	$\frac{O}{H} = 0.5$
le côté adjacent et l'hypoténuse H	$\frac{A}{H} = 0.87$
le côté opposé O et le côté adjacent A	$\frac{O}{A} = 0.58$

$$\sin\alpha = \frac{O}{H}$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{H}$$

$$\tan\alpha = \frac{O}{A}$$

Alors tous les rapports de côtés sont bien déterminés. Pour différencier les rapports des côtés on a va donner les noms $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$

Ces rapports sont appelés les fonctions trigonométriques, notés ***sinus, cosinus, tangente***, abrégées ***sin, cos, tan***.

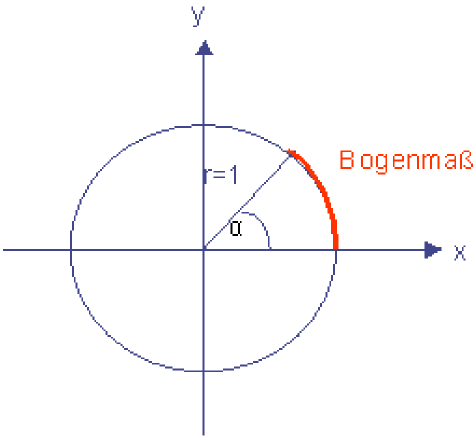
Pour un angle de 30 degrés ces rapports sont sauvegardés dans la calculatrice.

Angle aigu	Funktion $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ Umkehrfunktion	Seitenverhältnis, Verhältniszahl
30°	$\sin(30°)$ $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ $\sin^{-1}\left(\frac{6}{12}\right)$	$\frac{O}{H} = \frac{6}{12} = 0.5$
	$\cos(30°)$ $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ $\cos^{-1}(0.87)$	$\frac{A}{H} = \frac{17.62}{20.34} \approx 0.87$

30°	$\tan(30°)$ $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ $\tan^{-1}(0.58)$	$\frac{O}{A}=\frac{10.17}{17.62}\approx 0.58$

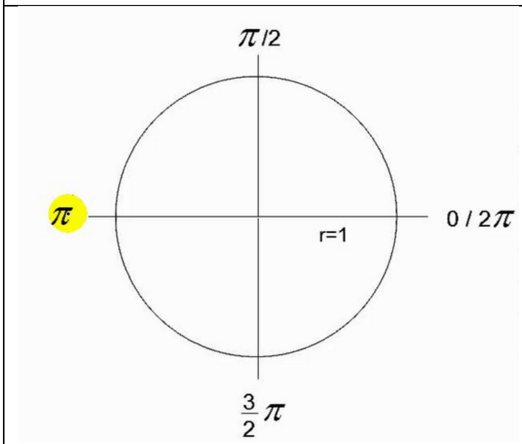
Les angles en degrés et radians

On peut mesurer les angles en degrés et radians (Grad-und Bogenmass). Pour l'instant on mesure les angles en degrés. Le mode de la calculatrice est en DEG.



Chaque angle correspond à une partie de la circonférence du cercle unité (Einheitskreis).

Le rayon du cercle unité est r=1.



Gradmaß	Bogenmaß
0°	0
90°	$\pi/2$
180°	π
270°	$\frac{3}{2}\pi$
360°	2π
45°	$\pi/4$
1°	$\pi/360$

Exercices Transforme les degrés en radians et vice versa.

1. Indique en radians, comme multiple de π

   a) 60°, 120°, 30°, 15°, 75°, 150°, 7.5°

b) 36°, 18°, 9°, 72°, 144°, 54°, 108°

2. Indique en degrés

a) π, $\pi/2$, $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $\pi/3$, $2\pi/3$, $\pi/6$

b) $\pi/10$, $3\pi/10$, $7\pi/10$, $5\pi/18$, $\pi/36$

Solutions

1. a) 60°, 120°, 30°, 15°, 75°, 150°, 7,5°
($\pi/3$, $2\pi/3$, $\pi/6$, $\pi/12$, $5\pi/12$, $5\pi/6$, $\pi/24$)

b) 36°, 18°, 9°, 72°, 144°, 54°, 108°
($\pi/5$, $\pi/10$, $\pi/20$, $2\pi/5$, $4\pi/5$, $3\pi/10$, $3\pi/5$)

2. a) π, $\pi/2$, $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $\pi/3$, $2\pi/3$, $\pi/6$
(180°, 90°, 45°, 135°, 225°, 60°, 120°, 30°)

b) $\pi/10$, $3\pi/10$, $7\pi/10$, $5\pi/18$, $\pi/36$
(18°, 54°, 126°, 50°, 5°)

Exercices Compléter le tableau

Angle	Funktion $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ Umkehrfunktion	Rapport des côtés
45°	$\sin(45°)$ $\longrightarrow$	$\sin(45) = \frac{O}{H} =$
60°	$\cos(60°)$ $\longrightarrow$	$\cos(60) = \frac{A}{H} =$
	$\longleftarrow$ $\sin^{-1}(0.4)$	$\frac{O}{H} = \frac{2}{5} = 0.4$
	$\longleftarrow$ $\cos^{-1}(0.3)$	$\frac{A}{H} = \frac{3}{10} = 0.3$
25°	$\tan(25°)$ $\longrightarrow$	$\frac{O}{A} =$

	$\xleftarrow{\;\ldots\ldots\;}$	$\frac{A}{H} = 0.65$
	$\xleftarrow{\tan^{-1}(0.3)}$	$\frac{\ldots}{\ldots} = 0.3$
15°	$\xrightarrow{\cos(15°)}$	$\frac{\ldots}{\ldots} =$

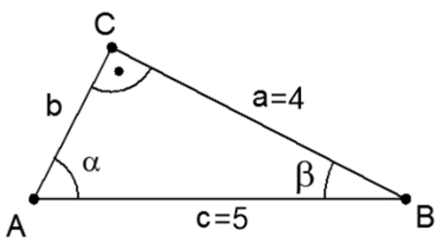
Compléter le tableau

L'angle α ***= ?***	***Le rapport de côtés***
$\alpha = \cos^{-1}(0.3) \approx 72.5$	$\cos(\alpha) = \frac{A}{H} = 0.3$
$\alpha = \tan^{-1}(2.2) \approx$	$\tan(\alpha) = \frac{O}{A} = 2.2$
30°	cos(30)= ….=
α	sin(α)= ….. = 0.4
20°	$\ldots(\alpha) = \frac{O}{H} = \ldots$
	$\ldots(\alpha) = \frac{A}{H} = 0.7$

$\tan(40) = \frac{3}{A}$	$A = \frac{3}{\tan(40)} \approx$
$\cos(20) = \frac{4}{H}$	H=
$\sin(70) = \frac{O}{5}$	O=

Pourquoi $\cos^{-1}(x)$ et $\sin^{-1}(x)$ n' existent pas pour x>1?

Exercice Calcule α , β et b en connaissant a=4 et c=5

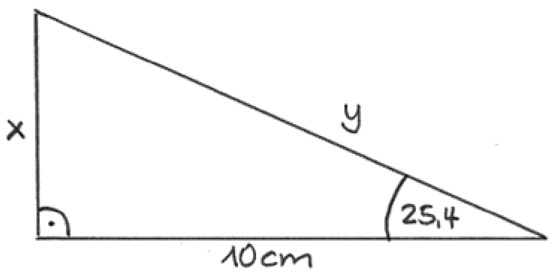


$$\sin(\alpha) = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx$$
$$\cos(\beta) = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx$$
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{5} \quad \Rightarrow \quad b = 5 \cdot \cos(\alpha) \approx$$

Exercices

Détermine le côté x et le côté y.

Regarde le chemin de solution, surtout l'écriture de la solution.



$$\tan(25.4) = \frac{x}{10}$$

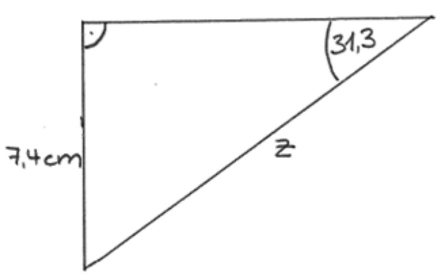
$$x = 10 \cdot \tan(25.4) \approx \underline{\underline{4.75\,cm}}$$

$$\cos(25.4) = \frac{10}{y}$$

$$y \cdot \cos(25.4) = 10$$

$$y = \frac{10}{\cos(25.4)} \approx \underline{\underline{11.07\,cm}}$$

Détermine le côté z.

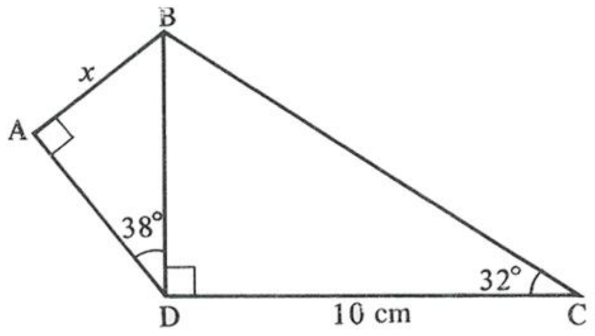


$$\sin(31.3) = \frac{7.4}{z}$$

$$z \bullet \sin(31.3) = 7.4$$

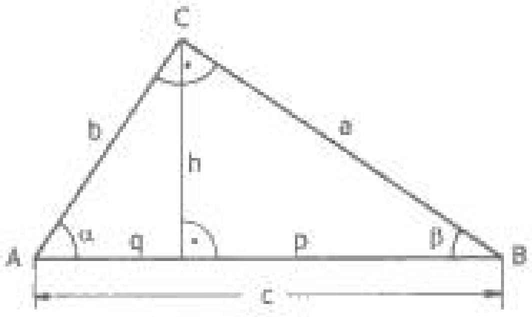
$$z = \frac{7.4}{\sin(31.3)} \approx \underline{\underline{14.24\ cm}}$$

Détermine le côté x. (x $\approx$3.85cm)

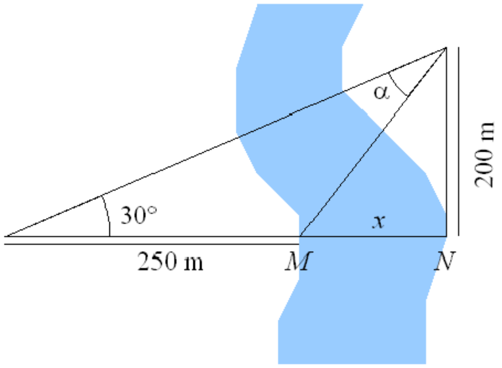


h=12.3
b=18.5

Calcule α, β, c et p.



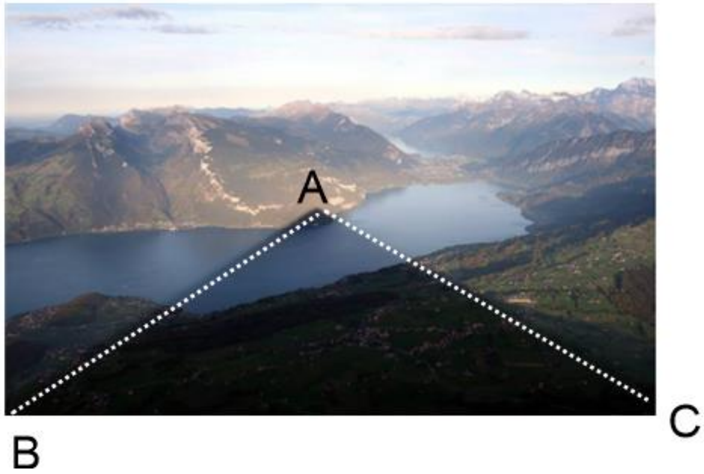
résultats : $\alpha \approx 41.7, \beta \approx 48.3,$ c ≈ 24.78, p ≈ 10.95, c et p.

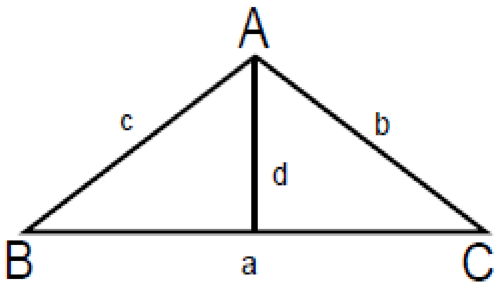


Pour déterminer la largeur du Nil entre deux points M et N les Egyptiens utilisaient le procédé suivant (vue prise d'avion). Calcule x et α .

Voici l'ombre triangulaire du Niesen. La photo était prise au sommet du Niesen.

a=10000 m, b=c=9800m

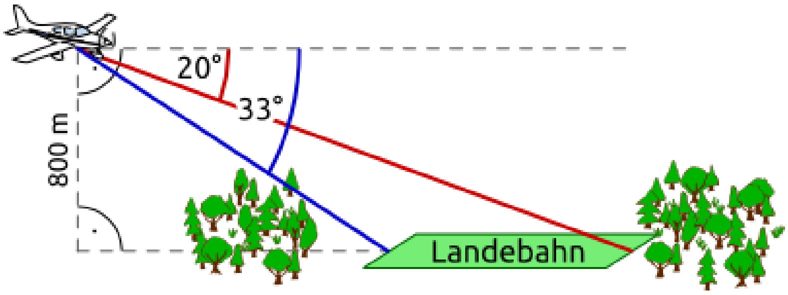


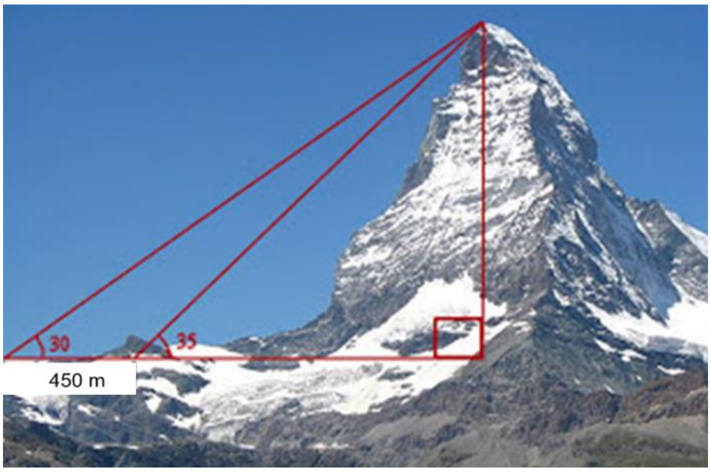


a) Calcule l'angle de l'ombre au point A et la distance d. (61.36°, 8428.5 m)
b) Du point A (647.2 mètres sur mer) on voit le sommet du Niesen sous un angle de 11.5°. Calcule l'altitude du sommet de Niesen. (2362 mètres sur mer)
c) Quelle est la distance à vol d'oiseau entre le sommet du Niesen et la pointe de l'ombre A? (8601.2m)

Résultats: a) 61.36°, 8428.5 m b) 2362 mètres sur mer c) 8601.2m

Calcule la longueur de la piste d'atterrissage

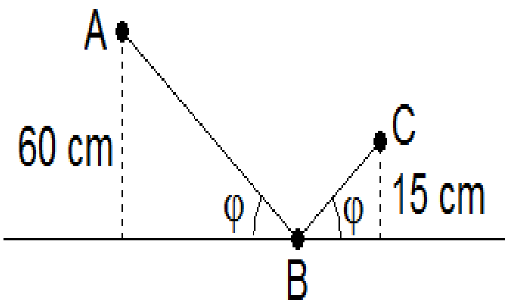


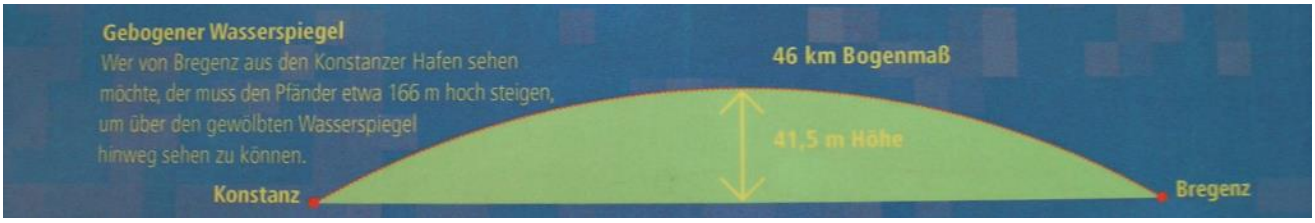


Calcule la hauteur du Mont Cervin.

On joue du billard. La boule à l'endroit A doit toucher la boule à l'endroit C. Calcule l'angle φ

$\overline{AC} = 130$ cm





Dans l'exemple suivant on veut calculer la sphéricité du lac de Constance.
La distance à la surface du lac entre Bregenz et Konstanz est 46 km.

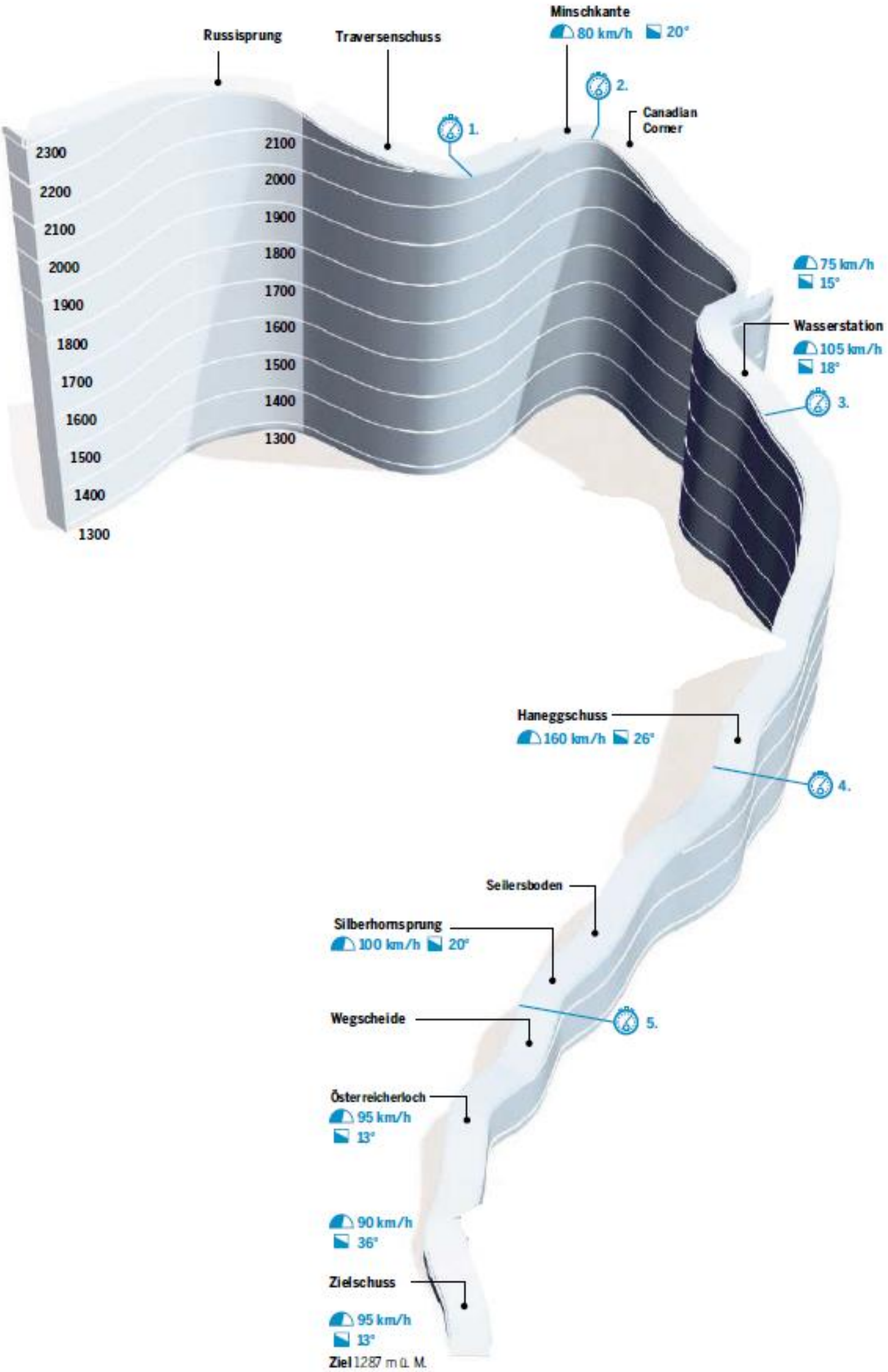
a) Est-ce que la valeur indiquée sur la photo ci-dessus est juste ? (41.5 m)

b) Quelle est la hauteur d'une tour à Konstanz, si le sommet serait encore visible depuis Bregenz.

Définition de la pente (Steigung)

La pente de la Gelmerbahn (Grimselgebiet) est 106%. Calcule l'angle d'inclinaison.

Calcule l'angle d'inclinaison et la pente en % de la piste du Lauberhorn. Quelle est la partie la plus raide?



Comment peut-on indiquer la pente?

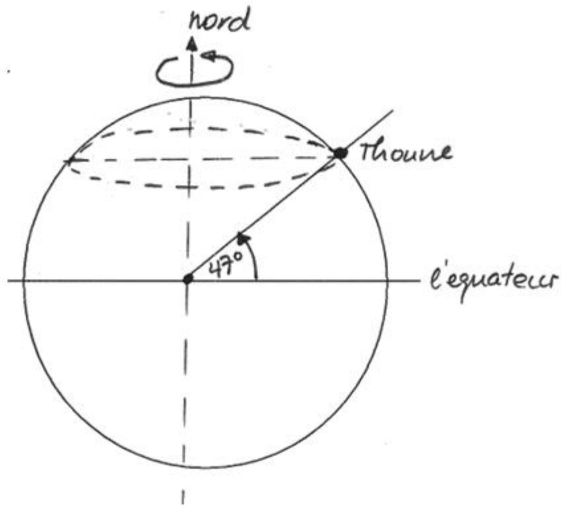
- ✶ L'angle d'élévation
- ✶ En pour cent : Si on a un dénivellement de 40 mètres sur 100 m horizontales on dit que la pente est de 40%. Alors un angle de 45° correspond à une pente de 100%.
- ✶ La pente $= \dfrac{\text{distance verticale}}{\text{distance horizontale}} = \tan(\alpha)$

Alors $\alpha = 25$. Alors la pente c'est $\tan(25) \approx 0.466 = \dfrac{46.6}{100} = 46.6\%$

Alors $\alpha = 50$. Alors la pente c'est $\tan(50) \approx 1.192 = \dfrac{119.2}{100} = 119.2\%$

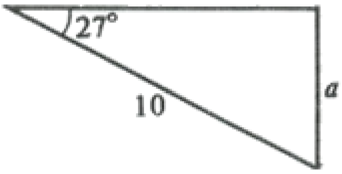
Voici la représentation d'une coupe verticale de la sphère terrestre. Le rayon est de 6366 km et la latitude géographique de Thoune est 47°Nord

Quelle est la vitesse avec laquelle les habitants de Thoune tournent autour de la terre ?



Série 1 : Calculer les côtés

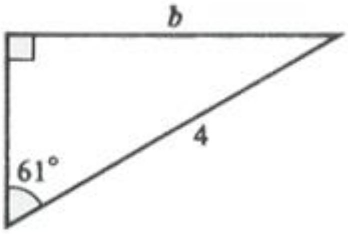
1.



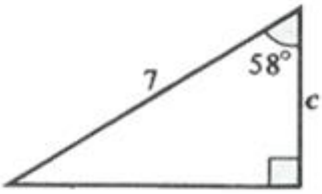
$$\sin(27) = \frac{a}{10}$$

$$a = 10 \cdot \sin(27) \approx 4.54\ cm$$

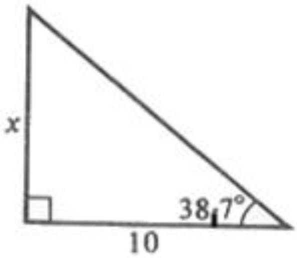
2.



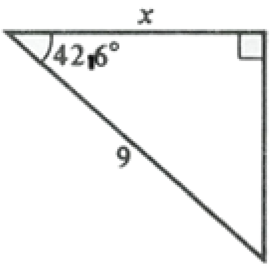
3.



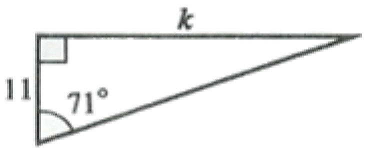
5.



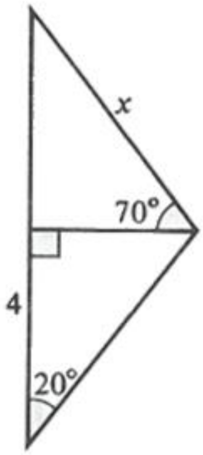
4.



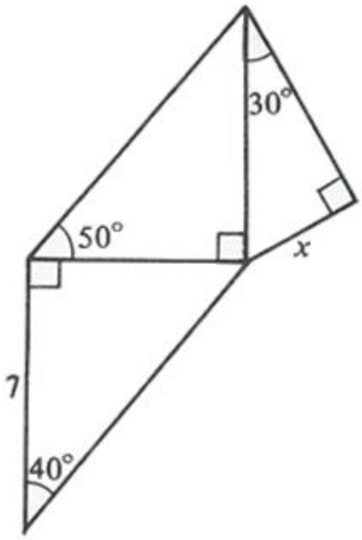
6.



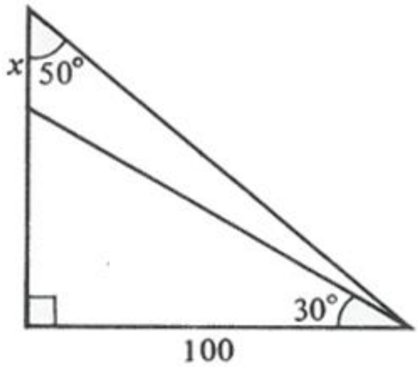
7.



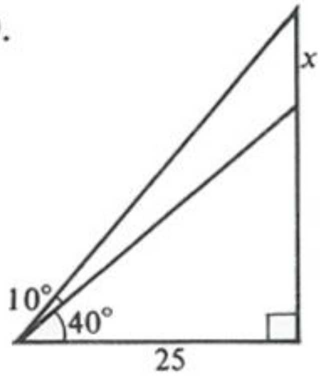
8.



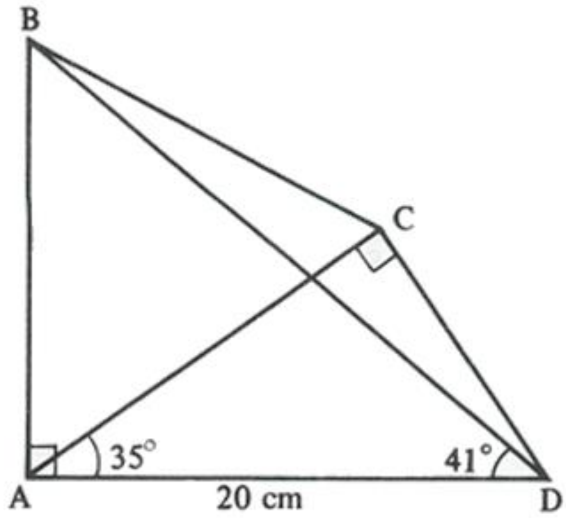
9.



10.



11. Calcule les segments $\overline{AB}, \overline{DC}, \overline{BD}$

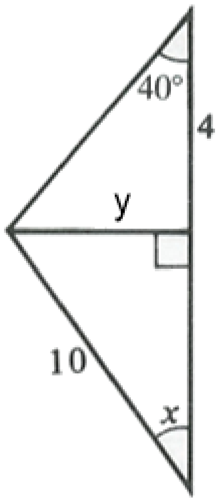


Solutions

1. 4.54
2. 3.5
3. 3.71
4. 6.62
5. 8.01
6. 31.9
7. 4.26
8. 3.5
9. 26.2
10. 8.82
11. a)17.4 b) 11.5 c) 26.5

Série 2 Calculer l'angle x

21.



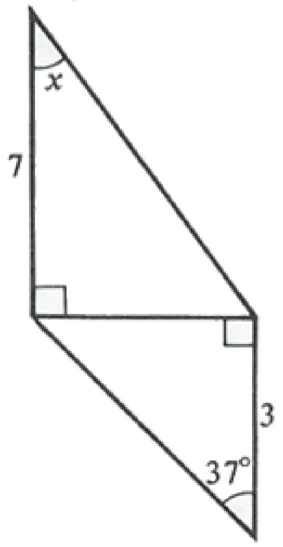
$\tan(40) = \dfrac{y}{4}$

$y = 4 \cdot \tan(40) \approx 3.36\ cm$

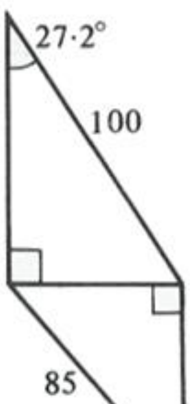
$\sin(x) = \dfrac{y}{10}$

$x = \sin^{-1}\left(\dfrac{y}{10}\right) \approx 19.6$

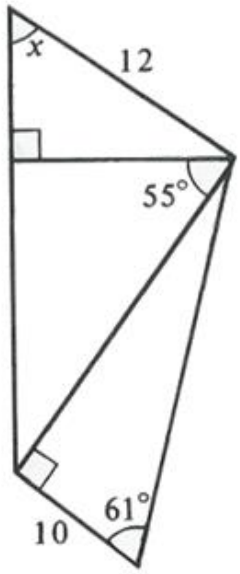
22.



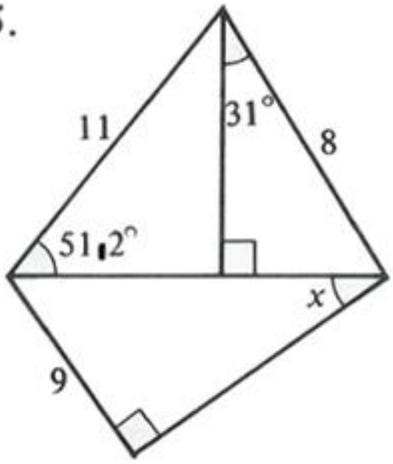
23.



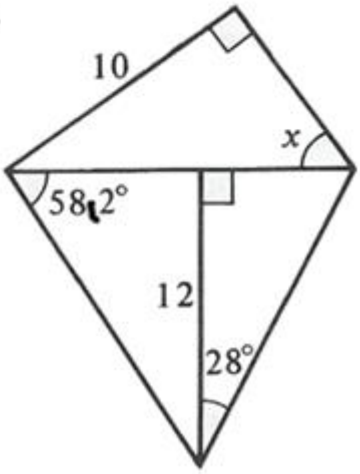
24.



25.



26.

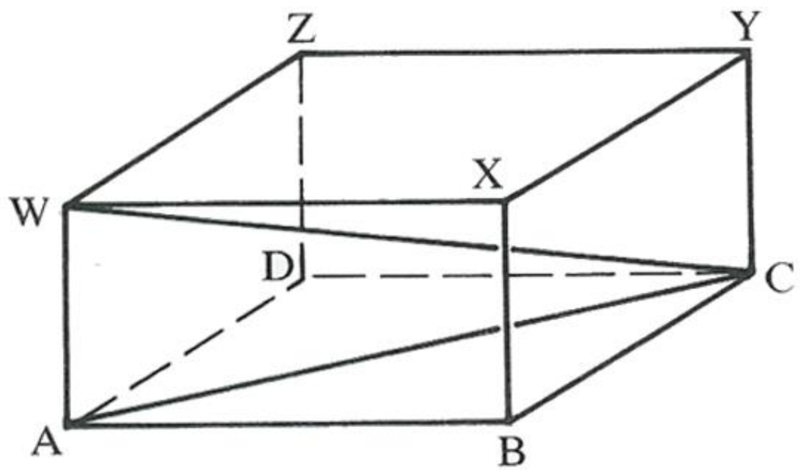


Solutions

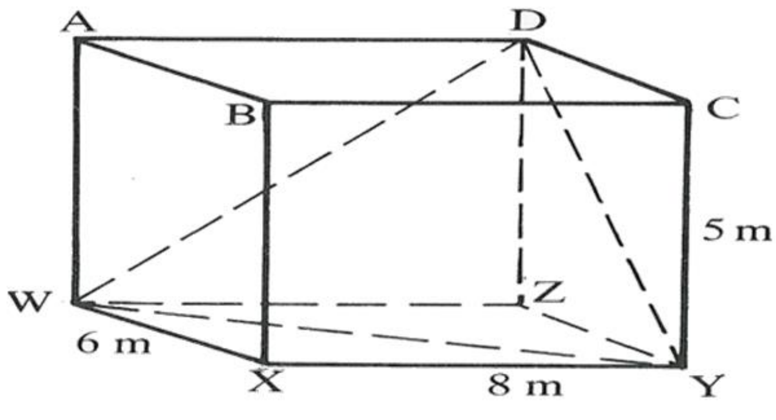
22. 17.9
23. 32.5
24. 59.6
25. 54.8
26. 46.3

Série 3 Problèmes en 3 dimensions

1. ABCD est ***un cuboïde*** (Quader), pas ***un cube*** (Würfel). $\overline{AW} = 3\text{m}$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8\text{m}$.
Calcule $\overline{AC}$ et l'angle entre les côtés $\overline{WC}$ et $\overline{AC}$.

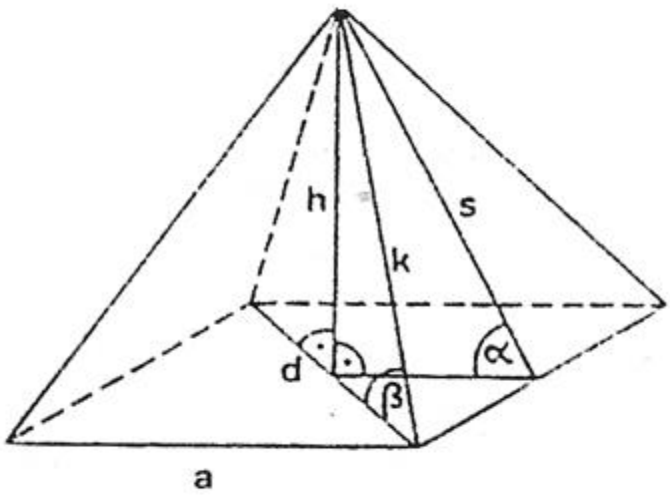


2. Voici un autre cuboïde. Calcule les côtés $\overline{WY}, \overline{DY}, \overline{WD}$ et les angles $\measuredangle DWC$, $\measuredangle YWC$

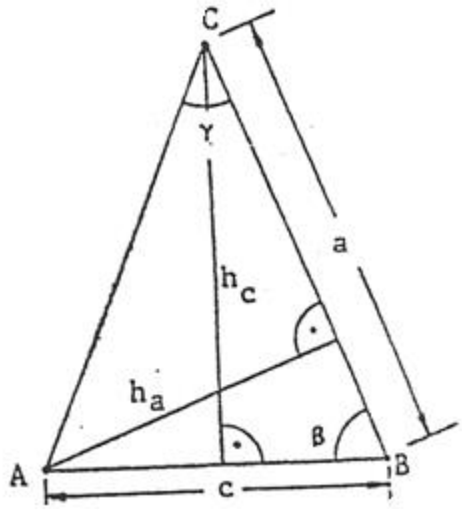


3. Dans ***une pyramide*** le sommet S se trouve verticalement au-dessus du milieu d'une aire de base quadratique. On connaît les segments a= 6cm et h= 5cm.

   Calcule s, d, k et les angles α et β.



4. ***triangle isocèle***
   a) b = 51,4 cm , h_c= 43,8 cm.
      Calcule le côté c.
   b) ***l'aire*** (Fläche) A= 130 cm^2 et la base 51.
      8cm. ***Détermine*** α et b.

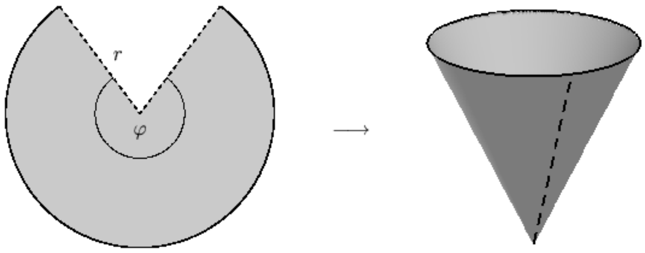


solutions

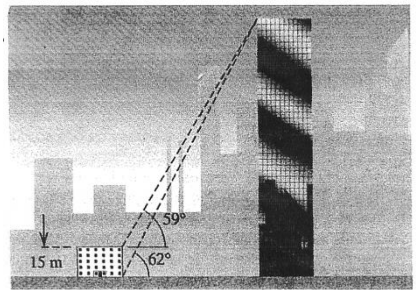
1) $\overline{AC} = 10; \alpha \approx 16.7$
2) 32.5 26.6
3) $\alpha = 59$ $s = 5.82$ $d = 8.49$ $\beta = 49.7$ $k = 6.56$
4) a) c=53,89 cm b) $\alpha = 11$ $b = 26,26$cm

Série 4 Problèmes appliqués

1. On fabrique une tasse conique en papier en découpant un secteur dans ***un disque*** de rayon 13 cm et en collant le côté OA à OB. Déterminer l'angle $\measuredangle AOB$ (c'est l'angle au sommet O) pour obtenir un cône avec un angle de 20°.



2. En observant ***un gratte-ciel*** du sommet d'une maison haute de 15 m, l'angle d'élévation (l'angle mesurée d'une droite horizontale vers le haut, Höhenwinkel) est de 59°. Si on l'observe depuis la route à côté du plus petit bâtiment, l'angle d'élévation est de 62°.



   a) Calcule la distance horizontale entre les deux bâtiments.

   b) Calcule la hauteur du gratte-ciel.

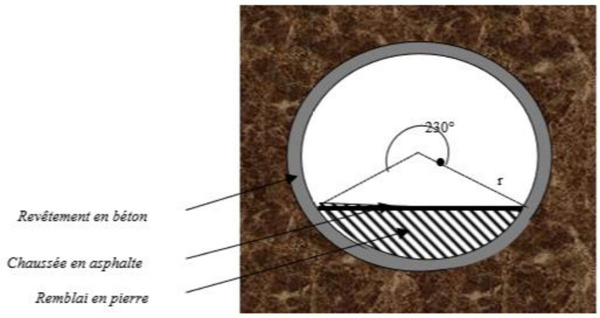
3. a) Le Pentagone à Washington, la résidence de Barack Obama, est le plus grand bâtiment administratif du monde, si on considère ***l'aire de base*** (Grundfläche) de ce bâtiment. L'aire forme ***un pentagone régulier*** (Fünfeck), dont chaque côté mesure 276 m. Détermine l'aire du bâtiment.

   b) Un ***octogone régulier*** (Achteck) est inscrit dans un cercle de rayon 12 cm. Calcule ***le périmètre*** (Umfang) et ***l'aire*** de l'octogone.

4. ***Un losange*** (Rhombus) possède un angle de 61° et l'aire est de 28 cm^2.

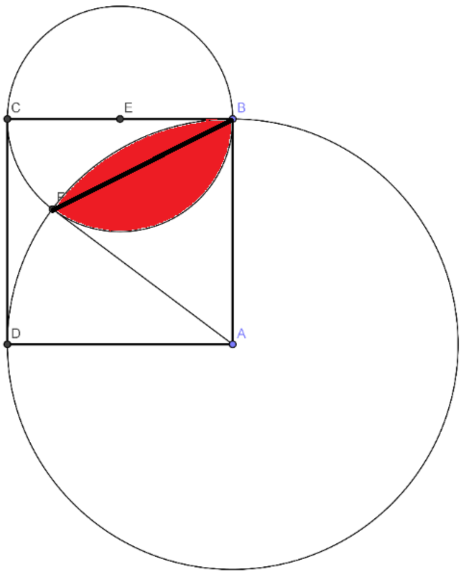
   Détermine la longueur des diagonales e et f.

5. La voûte d'u tunnel du Lötschberg est un arc en cercle dont l'angle vaut 230 degrés. Le rayon à l'intérieur est de 5 mètres et la longueur du tunnel 34.6 km. Calcule le volume de pierre en m^3, nécessaire au remblai du tunnel.



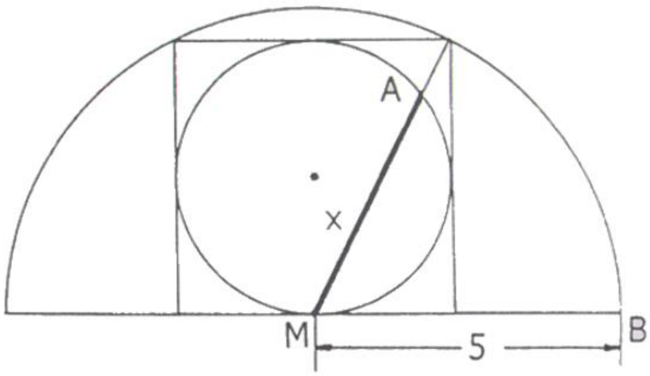
Coupe transversale du tunnel

6.



Le cercle plus grand possède un rayon de 10 cm. Détermine l'aire colorée.

7. Voici un demi-cercle avec un carré à l'intérieur. Calcule x= $\overline{AM}$



Facultatif

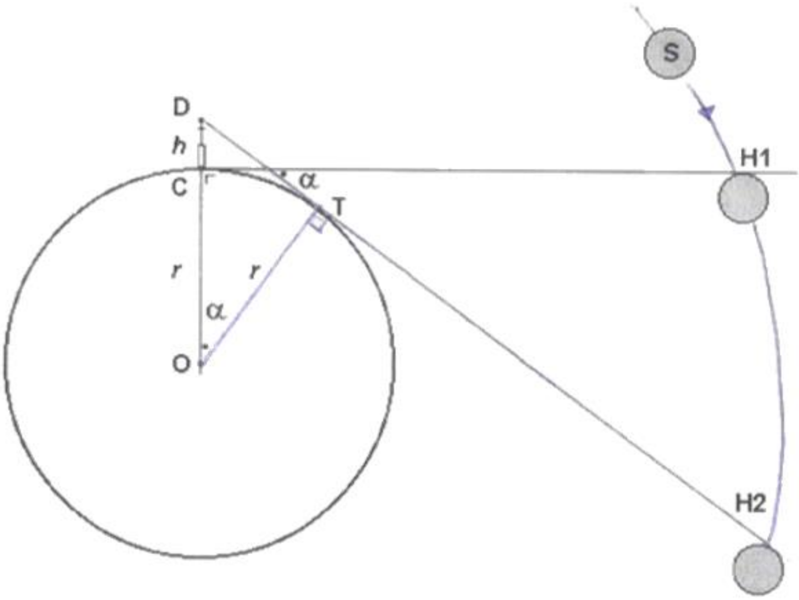
- Un triangle rectangle possède un périmètre de 24 cm et $\alpha = 72^o$. Détermine les côtés du triangle.

- Démontre la formule pour l'aire d'un triangle équilatéral $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, sachant que $\sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

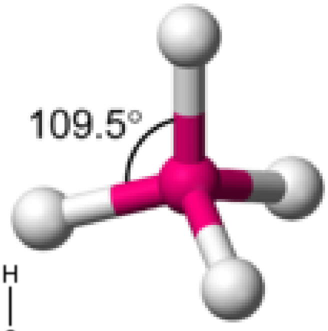
Est-ce qu'on peut déterminer le rayon de la terre en regardant le coucher de soleil ?

On utilise une montre et un mètre…

Une personne allongée sur une plage tropicale admire le coucher de soleil.
Au moment où le soleil disparaît sous l'horizon, elle déclenche le chrono de sa montre et se relève rapidement, ce qui lui permet d'observer un deuxième coucher de soleil quelques secondes plus tard.
Donne une estimation du rayon du globe terrestre, sachant que, quand la personne est debout, ses yeux sont à 170 cm du sol et qu'il s'écoule exactement 10 secondes entre les deux disparitions du soleil. La figure ci-jointe schématise les observations.



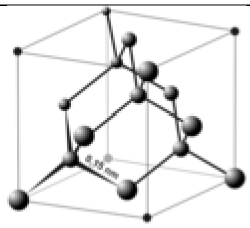
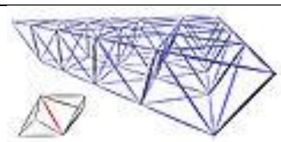
L'angle d'un tétraèdre ≈ 109.5°



Comment peut-on calculer cet angle ?

Un tétraèdre est formé par 4 triangles équilatéraux.

Si les molécules possèdent cette structure, il y a une très grande stabilité. Voici quelques applications

 un brise-lame Wellenbrecher	 Structure cristalline d'un diamant	 des pattes-d'oie Krähenfüsse (Strassensperre)	 La construction métallique d'une tour